



Au sujet des intégrales de Wallis : une démonstration sans récurrence pour les termes d'indice pair

Claire David

► To cite this version:

Claire David. Au sujet des intégrales de Wallis : une démonstration sans récurrence pour les termes d'indice pair. 2012. hal-00756401

HAL Id: hal-00756401

<https://hal.science/hal-00756401>

Preprint submitted on 26 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Au sujet des intégrales de Wallis : une démonstration sans récurrence pour les termes d'indice pair

Claire David

23 novembre 2012

Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

Résumé

AMS Subject Classification : 00A05, 26A42.

Les intégrales de Wallis, introduites par le mathématicien anglais John Wallis (1616-1703) font partie des grands « classiques » des problèmes de calcul d'intégrales. On rappelle leur expression :

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt \quad (1)$$

Un simple changement de variable montre directement que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n = J_n \quad (2)$$

La technique « classique » consiste à obtenir une relation de récurrence entre, respectivement, I_{n+2} et I_n , $n \in \mathbb{N}$, J_{n+2} et J_n , $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une double intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n \quad , \quad J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} J_n \quad (3)$$

Compte tenu de $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on en déduit facilement les expressions respectives de I_{2p} et I_{2p+1} , $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2p)} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+1} t \, dt = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2p)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!} \quad (5)$$

Il existe toutefois une méthode de calcul direct des termes d'indice pair I_{2p} , $p \in \mathbb{N}$, qui ne semble pas exister dans la littérature.

Il suffit de remarquer que, pour tout entier naturel p , on peut écrire, grâce aux formules d'Euler et à la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^{2p} t \, dt &= \int_0^\pi \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-k)t} e^{-ikt} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k e^{i(2p-2k)t} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p dt \\ &= \frac{\pi}{2^{2p}} C_{2p}^p \end{aligned} \quad (6)$$

où, pour tout entier k de $\{0, \dots, 2p\}$, C_{2p}^k est le coefficient binomial $\frac{(2p)!}{(2p-k)! k!}$.

Compte tenu de

$$\int_0^\pi \cos^{2p} t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt \quad (7)$$

on obtient bien :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt = \frac{\pi}{2^{p+1}} C_{2p}^p = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{(2p)!}{(p!)^2} \quad (8)$$